Пусть на множестве M задано отношение $\sim$.

Говорят, что это отношение

– *рефлексивно*, если $a \sim a$ для любого $a \in M$;

– *симметрично*, если из $a \sim b$ следует $b \sim a$;

– *транзитивно*, если из $a \sim b$ и $b \sim c$ следует $a \sim c$.

Отношение эквивалентности – это отношение, которое одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Главное, из-за чего мы этим занимаемся, – это следующая теорема.

Теорема. Множество M, на котором задано отношение эквивалентности $\sim$, разбивается на *классы эквивалентности*, то есть такие подмножества, что любые два элемента, лежащие в одном подмножестве, эквивалентны, а любые два элемента, лежащие в разных подмножествах, не эквивалентны.

Доказательство. Для каждого элемента a рассмотрим множество $M_a = \{b \mid b \sim a\}$ всех элементов, эквивалентных ему. Мы докажем, что два таких множества M_a и M_b, построенные для двух элементов a и b, либо не пересекаются, либо совпадают. Из этого, очевидно, будет следовать и утверждение теоремы – достаточно взять каждое такое множество по одному разу. Поскольку каждый элемент a лежит в классе M_a (это рефлексивность: $a \sim a$), вместе классы покроют всё множество M.

Пусть два множества M_a и M_b пересекаются – у них есть общий элемент c. Это значит, что $c \sim a$ (и тем самым $a \sim c$, в силу симметричности), а также $c \sim b$. Из $a \sim c$ и $c \sim b$ по транзитивности следует $a \sim b$: a и b эквивалентны! Теперь уже легко видеть, что $M_a = M_b$: если, скажем, $c \in M_b$, то есть $b \sim c$, то (с учетом $a \sim b$) имеем $a \sim c$ и $c \in M_a$, и наоборот – что и требовалось доказать.

Пример. Пусть M – множество всех прямых на плоскости, и $\ell \sim m$, если прямые ℓ и m параллельны или совпадают. Легко проверить, что это отношение эквивалентности. Получающийся класс эквивалентности называют *направлением*; в один класс с прямой ℓ, кроме неё самой, входят все параллельные ей прямые.

Привычный оборот "провести через точку A прямую данного направления" теперь можно корректно расшифровать как "провести через A прямую, параллельную данной".

Наш главный пример относится к сравнениям по модулю.

Зафиксируем натуральное m; тогда сравнимость $\bmod m$ – отношение эквивалентности на множестве целых чисел. Образующиеся при этом классы эквивалентности называются *вычетами* $\bmod m$; таким образом, вычет содержит некоторое целое число и все числа, отличающиеся от него на кратное m.

Говоря о числе решений, например, сравнения $ax \equiv b \pmod m$, мы имеем в виду не количество чисел, удовлетворяющих этому сравнению (их или вовсе нет, или бесконечно много), а количество вычетов.