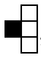
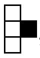
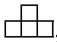
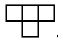
## Вступительные задачи.

1. В стране 2000 городов, каждые два из которых соединены дорогой. Строительные организации представили все возможные проекты введения одностороннего движения на всех дорогах. Министерство транспорта отвергло все проекты, не обеспечивавшие возможности добраться из любого города в любой другой. Докажите, что все же осталось более половины проектов.

2. Квадрат $600 \times 600$ разбит на фигурки из 4 клеток вида , , , . В фигурках первых двух типов в закрашенных клетках записано число $2^k$, где $k$ – номер столбца, в котором находится эта клетка. Докажите, что сумма всех записанных чисел делится на 9.

3. Как известно, уравнение $x^2 - Dy^2 = 1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах при любом натуральном $D$, не являющемся точным квадратом. Докажите, что при простом $p = 4k+1$ уравнение $x^2 - py^2 = -1$ также имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

4. Докажите, что если $m$ и $n$ – целые числа и $1 \leqslant m < n$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k k^m C_n^k = 0$.

5. В некоторой стране любые два города соединены беспосадочным односторонним (в одном направлении) рейсом авиакомпании “Мягкая посадка”. При этом из любого города в любой другой можно перелететь рейсами этой авиакомпании. Докажите, что эта компания может предложить авиатур, который проходит через каждый город ровно один раз и заканчивается в том же городе, где начался.

6. Обозначим через $S(n)$ сумму всех натуральных делителей числа $n$, отличных от $n$. Докажите, что уравнение $S(n) = 1\,000\,000$ имеет а) не более 1500000, б) не более 1000000 решений.

7. Докажите, что количество решений уравнения $x^3 + y^2 = z^3 + t^2 + 1$ в натуральных числах, не превосходящих $10^6$, меньше, чем количество решений уравнения $x^3 + y^2 = z^3 + t^2$ в натуральных числах, не превосходящих $10^6$.

8. В некоторых клетках прямоугольной таблицы из $n$ строк и $m > n$ столбцов расставлены звездочки так, что в каждом столбце стоит хотя бы одна звездочка. Докажите, что найдется такая звездочка, что в ее строке звездочек больше, чем в ее столбце.

9. В таблице $m \times n$ записаны числа так, что для любых двух строк и любых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стерли, но по оставшимся можно восстановить стертые. Докажите, что осталось не меньше чем $m+n-1$ чисел.

10. (Гаусс, Disquisitiones Arithmeticae, art.78, также известно под названием ”обобщенной теоремы Вильсона”) Докажите, что произведение всех элементов приведенной системы вычетов по модулю $m$ сравнимо с $\pm 1$ по модулю $m$, и установите, какой знак соответствует каждому $m$.