Серия 1: комбинаторика и арифметика.

1. Множество состоит из n элементов. Для любой пары (упорядоченной) его подмножеств A, B подсчитано число элементов в пересечении $A \cap B$, а затем все эти числа просуммированы. Докажите, что сумма всех чисел равна $4^{n-1}n$.

2. В школе работает несколько кружков, в каждом не более 10 учеников. Известно, что у любых 11 кружков есть общий участник. Докажите, что есть ученик, который участвует во всех кружках.

3. В лесу mn тропок и несколько полян. Каждая тропка соединяет две поляны. Известно, что тропки можно раскрасить в m цветов так, чтобы на каждой поляне сходились тропки разных цветов. Докажите, что это можно сделать, покрасив в каждый цвет ровно n тропок.

4. В графстве Липшир проживают n джентльменов. Каждый из них знаком с k другими джентльменами. У каждых двух знакомых джентльменов ровно ℓ общих знакомых, а у каждых двух незнакомых джентльменов ровно m общих знакомых. Докажите, что $m(n-k-1) = k(k-\ell-1)$.

5. Докажите, что последовательность $a_n = d(n^2+1)$ не является а) монотонной, б) строго монотонной ни с какого места. (Здесь $d(n)$ обозначает количество натуральных делителей числа n.)

6. Докажите, что для любых натуральных a и b $\quad d(ab) \geqslant d(a) + d(b) - 1$.

7. Число 76 обладает следующим свойством: последние две цифры числа $76^2 = 5776$ дают снова 76.

а) Какие двузначные числа обладают этим свойством?

б) Найдите все трехзначные числа A такие, у которых последние три цифры числа A^2 составляют число A.

в) Существует ли бесконечная последовательность цифр a_0, a_1, a_2, … такая, что для любого n квадрат записываемого ими числа $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ оканчивается цифрами $\overline{\ldots a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$? (Очевидные ответы $a_0 = 0$ или 1, $a_i = 0$ при $i > 1$ исключаем). Проведите полное исследование.

8. Некоторое множество целых чисел, среди элементов которого есть как положительные, так и отрицательные, вместе с каждыми своими элементами a и b содержит $2a$ и $a+b$.

Доказать, что это множество содержит разность любых двух своих элементов.