Серия 2, с инверсиями и линейными комбинациями.

Пусть дана некоторая перестановка натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$. Пара (не обязательно стоящих рядом) чисел i и j этой перестановки образует *инверсию*, если $i < j$ и j стоит слева от i.

Перестановка любых двух из таких чисел называется *транспозицией*.

В естественной расстановке 1 2 ... n число инверсий равно нулю; в обратной n $n-1$ $\ldots 2$ 1 – $\frac{n(n-1)}{2}$.

1. (Теорема об инверсиях). Докажите, что любая транспозиция меняет четность числа инверсий.

2. Каждый голосующий на выборах вносит в избирательный бюллетень фамилии n кандидатов. На избирательном участке находится $n+1$ урна. После выборов выяснилось, что в каждой урне лежит по крайней мере один бюллетень и при всяком выборе $(n+1)$-го бюллетеня по одному из каждой урны найдётся кандидат, фамилия которого встречается в каждом из выбранных бюллетеней. Докажите, что по крайней мере в одной урне все бюллетени содержат фамилию одного и того же кандидата.

3. К натуральным числам a и b применён алгоритм Евклида: $a = bq_1 + r_1$, $b = r_1q_2 + r_2$, $r_{i-2} = r_{i-1}q_i + r_i$, при $i \leqslant k$, $r_{k-1} = r_kq_{k+1}$, $0 < r_1 < b$, $0 < r_i < r_{i-1}$ при $1 < i \leqslant k$. Положим $r_{-1} = a$, $r_0 = b$, $x_{-1} = 1$, $x_0 = 0$, $y_{-1} = 0$, $y_0 = 1$, $r_i = r_{i-2} - q_ir_{i-1}$, $x_i = x_{i-2} - q_ix_{i-1}$, $y_i = y_{i-2} - q_iy_{i-1}$.

а) Докажите, что $ax_i + by_i = r_i$ при $-1 \leqslant i \leqslant k$.

б) Докажите, что $(-1)^ix_i \leqslant 0$ и $(-1)^iy_i \geqslant 0$.

в) Докажите, что $x_{i-1}y_i - x_iy_{i-1} = (-1)^i$.

4. Пусть $n > 2$ – натуральное число, и V_n – множество чисел вида $1 + kn$, где $k = 1, 2, \ldots$. Число $m \in V_n$ будем называть неприводимым, если не существует чисел $p, q \in V_n$ таких, что $pq = m$. Докажите, что существует число $r \in V_n$, которое можно разложить на неприводимые в V_n множители более чем одним способом.

5. Целые числа a, b, c, d удовлетворяют условию $ad - bc = 1$. Докажите, что $(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

6. Пусть a_1, a_2, a_3, $\ldots$– бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел. Докажите, что существует бесконечно много m, для которых можно найти такие натуральные x, y, h, k, что $0 < h < k < m$ и $a_m = xa_h + ya_k$.

7. В каждой точке с натуральными координатами записано натуральное число, причем каждое число встречается не более, чем в 2003 точках. Докажите, что найдется точка (m, n), в которой записано число, большее mn.

8. (Теорема Ламе.) К натуральным числам a и b, $a > b$, применяется алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя этих чисел. Докажите, что число делений с остатком не превосходит $5p$, где p – количество цифр в десятичной записи числа b.