Серия 3: усвоение пройденного.

1. Докажите, что площадь параллелограмма с вершинами $(0,0)$, (a,b), (c,d) и $(a+c, b+d)$ равна $|ad-bc|$.

2. Пусть a, b, c, d – такие целые числа, что система уравнений $ax+by=m$, $cx+dy=n$ при любых целых m и n имеет решение в целых числах. Докажите, что $ad-bc=\pm 1$.

3. Дано бесконечно много наборов $(n_1, n_2, \ldots, n_{10})$ целых неотрицательных чисел. Докажите, что среди них можно найти два таких набора $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_{10})$, что $x_i \leqslant y_i$ при всех $i \leqslant 10$.

4. Докажите, что все натуральные числа от 1 до 2^n можно так разбить на две групы, что суммы m-х степеней чисел в группах равны при всех $m<n$.

5. а) Докажите, что каждый многочлен является разностным многочленом некоторого другого многочлена.

б) Докажите, что из условия $Q(x)=\Delta P(x)$ многочлен $P(x)$ определяется однозначно с точностью до прибавления произвольной константы.

6. а) Докажите, что многочлен $P_n(x)=\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$ принимает целые значения при всех целых x.

б) Докажите, что многочлен $P(x)=c_nP_n(x)+c_{n-1}P_{n-1}(x)+\ldots+c_0P_0(x)$, где $c_0, c_1, \ldots, c_n$ – целые числа, принимает целые значения при всех целых x.

в) Докажите, что всякий многочлен $P(x)$ степени n, принимающий целые значения при всех целых x, можно представить в виде $P(x)=c_nP_n(x)+c_{n-1}P_{n-1}(x)+\ldots+c_0P_0(x)$, где $c_0, c_1, \ldots, c_n$ – целые числа.

г) Докажите, что многочлен $P(x)$ степени n, принимающий целые значения при $x=0,1,\ldots,n$, принимает целые значения при всех целых x.

д) Докажите, что многочлен $P(x)$ степени n, принимающий целые значения в $n+1$ последовательных целых точках, принимает целые значения при всех целых x.

7. В некотором городе разрешены только тройные обмены квартир (когда люди из квартиры A переезжают в B, из B в C и из C в A). Можно ли, производя такие обмены, в результате обменять две квартиры, оставив во всех остальных квартирах их прежних обитателей?

8. а) Докажите, что количество делителей вида $4k+1$ у любого натурального числа не меньше количества делителей вида $4k+3$.

б) Для каких натуральных чисел имеет место равенство?