Серия 4, в которой комбинаторика встречает арифметику

1. **Определение.** *Ряд Фарея* Φ_n – последовательность расположенных по возрастанию несократимых дробей $\frac{a}{b}$ с $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$.

Медианта дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ – дробь $\frac{a+c}{b+d}$.

а) Докажите, что ряд Φ_n получается из ряда Φ_{n-1} вставкой медиант между соседними дробями с суммой знаменателей n.

б) Докажите, что для двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, стоящих рядом в каком-нибудь ряду Фарея, $|ad - bc| = 1$.

2. Продолжения сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке W, а X и Y – середины диагоналей AC и BD. Докажите, что площадь треугольника WXY равна одной четверти площади четырехугольника $ABCD$.

3. На книжной полке в каком-то порядке стоят книги 20-томного собрания сочинений. Библиотекарь хочет расставить эти тома в монотонном порядке – с 1-го по 20-й слева направо. За один прием библиотекарь меняет местами любой том, стоящий не на своем месте, с томом, занимающим его место. Докажите, что число таких операций, нужное для упорядочения томов, не зависит от последовательности действий библиотекаря.

4. На полке в беспорядке стоит энциклопедия в 44 томах. Разрешается поменять местами

а) два тома, стоящих рядом;

б) два любых тома.

За какое наименьшее число ходов тома гарантированно удастся расположить по порядку (возрастания номеров)?

5. Можно ли разбить куб со стороной 2011 на кубы со сторонами 2, 3 и 5?

6. На доске написаны $n \geqslant 3$ натуральных чисел. Разрешается выбрать три числа a, b, c, которые не все равны и каждое из которых меньше суммы двух других, и заменить их числами $a + b - c$, $b + c - a$ и $c + a - b$. Докажите, что когда-нибудь эту деятельность придётся прекратить.

7. Пусть M – множество значений многочлена $x^2 + 1$ в целых точках. Докажите, что множество M не содержит ни одной бесконечной (непостоянной) геометрической прогрессии.

8. В левом нижнем углу доски $2 \times n$ лежит 2^{n+1} конфет. Каждую минуту Вася находит две конфеты, лежащие в одной клетке, и перекладывает одну из них в соседнюю справа или сверху клетку, а другую конфету съедает. Докажите, что вне зависимости от порядка действий Василия рано или поздно хотя бы одна конфета окажется в правом верхнем углу.