Серия 5, обо всём сразу.

1. Аня написала на доске 32 целых числа и закрыла их карточками. Потом она сказала Боре, что он может указать любые 7 карточек, а она сообщит ему четность суммы всех 7 чисел под этими карточками. Какое наименьшее число вопросов Боря должен задать Ане, чтобы узнать четность суммы всех 32 чисел?

2. а) В клетках таблицы 8×8 расставлены целые числа. Разрешается прибавлять по 1 ко всем числам любого квадрата 3×3 или 4×4. Верно ли, что при любой начальной расстановке чисел с помощью таких операций можно сделать все числа четными?

б) В клетках таблицы 8×8 расставлены вещественные числа. Разрешается прибавить одно и то же (не обязательно положительное) вещественное число ко всем числам любого квадрата 3×3 или 4×4. Верно ли, что при любой начальной расстановке чисел с помощью таких операций можно сделать все числа равными?

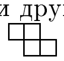
3. Световое табло состоит из нескольких лампочек, каждая из которых может находиться в двух состояниях (гореть или не гореть). На пульте несколько кнопок, при нажатии каждой из которых одновременно меняется состояние у некоторого набора лампочек (для каждой кнопки – своего). Вначале все лампочки не горят.

а) Докажите, что число различных узоров, которые можно получить на табло, – степень двойки.

б) Сколько различных узоров можно получить на табло, состоящем из $m \times n$ лампочек, расположенных в форме прямоугольника, если кнопками можно переключать каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд лампочек?

4. Даны два взаимно простых числа a и b. Известно, что всякое целое число можно представить в виде $ax + by$, где x и y – целые. Рассмотрим множество M целых чисел, которые представимы в виде $ax + by$, где x и y – целые неотрицательные числа. Докажите, что некоторое число c обладает следующим свойством: из двух чисел n и $c - n$ (где n – любое целое) одно принадлежит M, а другое нет.

5. В марсианском алфавите k букв, и два слова называются похожими, если в них одинаковое количество букв и они отличаются лишь в одном месте (например, ТРИКС и ТРУКС). Докажите, что все слова в языке можно разбить на k групп, в каждой из которых все слова не похожи друг на друга.

6. Из клетчатого прямоугольника вырезана фигура вида . Докажите, что остаток нельзя целиком разрезать на полоски из 3 клеток.

7. а) В городе Незнакомске живут $3n$ человек, причем любые два жителя имеют общего знакомого. Докажите, что можно указать n человек таких, что каждый из остальных знаком хотя бы с одним человеком из этих n.

б) В городе Незнакомске миллион жителей, причем любые два из них имеют общего знакомого среди остальных. Докажите, что можно выбрать 5000 жителей города так, чтобы любой из оставшихся имел хотя бы одного знакомого среди выбранных.

8. Саша написал на доске ненулевую цифру и приписывает к ней справа по одной ненулевой цифре, пока не выпишет миллион цифр. Докажите, что на доске не более 100 раз был написан точный квадрат.