**Серия 6, с разговорами о бесконечном**

1. Из бесконечного клетчатого листа бумаги вырезаны все клетки, обе координаты которых делятся на 4. Докажите, что не существует бесконечного маршрута коня, проходящего ровно по одному разу по всем оставшимся клеткам.

2. Пусть $A$ – бесконечное множество целых чисел такое, что каждое $a \in A$ является произведением не более чем 2021 простых чисел. Докажите, что существуют бесконечное множество $B \subset A$ и число $d$ такое, что наибольший общий делитель любых двух чисел из $B$ равен $d$.

3. На бесконечной ленте напечатана бесконечная последовательность цифр от 1 до 9. Докажите, что либо какая-то комбинация цифр повторится 10 раз подряд, либо из нее можно вырезать 10 стозначных чисел, идущих в порядке убывания.

4. Рассмотрим на плоскости множество $M$ точек с натуральными координатами. Каждую точку $P(a, b)$ из $M$ соединим отрезком с каждой из точек множества $M$, находящейся на прямой $x = a + b$ над биссектрисой первого координатного угла, т.е. с точками множества

$$\{(a+b, c) \mid c \in \mathbb{Z}, c > a+b\}.$$

Докажите, что не существует раскраски точек из $M$ в конечное число цветов, в которой любые две точки, соединенные отрезком, были бы разного цвета.

5. В языке племени “мумбо-юмбо” имеется четыре звука: А, У, Ы и Е. Звук Е – особый. Сказанный сам по себе, он означает некоторое слово, но если его присоединить к какому-нибудь слову (в начале, середине или в конце), то значение этого слова не изменится. Кроме того, если представитель племени произносит семь раз подряд звуки А, У или Ы, это значит то же самое, что он произнес один раз звук Е. Наконец многие туземцы вместо УУУЫ предпочитают говорить ЫУ, вместо ААЫ – ЫА и вместо УУУА – АУ, так что эти слова не различаются.

В племени 400 туземцев. Могут ли у всех них быть разные имена?

6. Функция $f(x)$, определенная при всех действительных $x$, удовлетворяет следующему условию: уравнение $f(x) = px + q$ имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение уравнение $x^2 = px + q$. Докажите, что $f(x) = x^2$.

7. По плоскости ползут несколько черепах, скорости которых равны по величине, но различны по направлениям. Докажите, что, как бы черепахи ни были расположены вначале, через некоторое время они будут находиться в вершинах выпуклого многоугольника.

8. 24 студента решали 25 задач. У преподавателя есть таблица $24 \times 25$, в которой записано, кто какие задачи решил. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один студент. Докажите, что

а) можно отметить некоторые задачи “галочкой” так, что каждый из студентов решил четное число (в частности, быть может, нуль) из отмеченных задач;

б) можно отметить некоторые из задач знаком “$+$”, а некоторые из остальных - знаком “$-$” и приписать каждой задаче некоторое целое положительное число баллов так, что каждый студент набрал поровну баллов за задачи, отмеченные знаками “$+$” и “$-$”.