

1. Пусть p – простое, $p > 5$ и $X = \{p - n^2 | n \in \mathbb{N}\}$. Докажите, что X содержит два различных целых x и y таких, что $x \neq 1$ и $x|y$.

2. а) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ при всех натуральных n . Докажите, что $14 < a_{100} < 18$.

б) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$ при всех натуральных n . Докажите, что $6 < a_{100} < 7$.

3. Каждые два из n городов страны Фестивалии соединены прямым авиационным или железнодорожным сообщением. Из каждого города можно и улететь на самолете, и выехать на поезде. Докажите, что в стране есть четыре города A, B, C, D такие, что A с B и C с D соединены авиарейсами, а B с C и D с A – поездами.

4. На плоскости дано конечное множество точек и прямоугольная система координат. Для любых двух точек этого множества рассмотрим прямоугольник (возможно, вырожденный), в котором эти точки лежат в концах диагонали, а стороны параллельны осям координат. Докажите, что все множество можно покрыть пятью такими прямоугольниками.