

Серия 24, многословная

1. Дано 15-значное число, записанное нулями и единицами, которое делится на 81, но не делится на 10. Докажите, что из него нельзя вычеркнуть один из нулей так, чтобы полученное число по-прежнему делилось на 81.
2. Найдите все натуральные числа n , у которых сумма квадратов всех делителей, кроме n , равна $2n + 2$.
3. На острове, население которого составляют только рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, находится НИИ. Каждый из его сотрудников однажды сделал два заявления:
 - а) В институте нет и десяти человек, которые работают больше меня;
 - б) По крайней мере сто человек в институте получают зарплату большую, чем моя.Известно, что нагрузка у всех работников разная, как и зарплата. Сколько человек работает в НИИ?
Обозначим через $p(n, k)$ количество делителей числа n , не меньших, чем k . Чему равна сумма $p(1001, 1) + p(1002, 2) + p(1003, 3) + \dots + p(2000, 1000)$?
5. Натуральные числа p и q таковы, что $p \geq q$. У ослика Иа-Иа есть pq палочек, из которых он может составить $p - q$ угольников. Докажите, что из этих же палочек Иа-Иа может составить $q - p$ угольников.
6. В войске герцога Икторна 1000 гоблинов. Любые два гоблина либо дружат, либо враждуют, либо незнакомы. Гоблины – существа малообщительные, разговаривают только с друзьями. К тому же все они в плохом настроении, поскольку у каждого гоблина любые два его друга враждуют, а любые два врага дружат. Докажите, что для того, чтобы все войско узнало о предстоящем наступлении на Данвин, герцог должен сообщить об этом не менее чем 200 гоблинам.
7. Клетчатый прямоугольник разрезали на прямоугольники 1×2 (доминошки) так, что любая прямая, идущая по линиям сетки, пересекает кратное четырем число доминошек. Докажите, что длина одной из сторон делится на 4.