Серия 6(а): векторы, хчл, разное.

1. На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар A, B этих точек взяты векторы $\vec{AB}$, причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\vec{0}$.

2. На плоскости дано $2n$ векторов, ведущих из центра правильного $2n$-угольника в его вершины. Сколько из них нужно взять, чтобы их сумма имела максимальную длину?

3. На плоскости расположены два равносторонних треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, вершины которых занумерованы по часовой стрелке. Из произвольной точки O отложены векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, равные соответственно векторам $\vec{A_1A_2}$, $\vec{B_1B_2}$, $\vec{C_1C_2}$. Докажите, что точки A, B, C также являются вершинами равностороннего треугольника.

4. Докажите, что

а) точка X принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда существует такое t, что для любой точки O плоскости $\vec{OX} = t\vec{OA} + (1-t)\vec{OB}$;

б) точка X принадлежит отрезку AB тогда и только тогда, когда существует такое t, $0 < t < 1$, что для любой точки O плоскости $\vec{OX} = t\vec{OA} + (1-t)\vec{OB}$.

5. Вычислите значение $\underbrace{\sqrt{0,99999\ldots 99999}}_{100 \text{ единиц}}$ с точностью а) 100 знаков после запятой; б) 101 знака после запятой: в) 200 знаков после запятой.

6. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение $f(2x-3) + f(3x+1) = 0$ имеет ровно один корень. Найдите корень трехчлена $f(x)$.

7. На координатной плоскости Oxy нарисовали график функции $y = x^2$. Потом оси координат стерли – осталась только парабола. Как при помощи циркуля и линейки восстановить оси координат и единицу длины?

8. График квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ с рациональными коэффициентами параллельно перенесли на вектор $\overrightarrow{u} = (x_0, y_0)$, координаты которого – также рациональные числа и $x_0 \neq 0$. Докажите, что точка пересечения этих двух графиков имеет рациональные координаты.

9. Докажите, что для любого действительного корня уравнения $x^3 + px + q = 0$ выполняется неравенство $4qx \leqslant p^2$.