Серия 3(а): дроби по модулю и пр.

1. (Эйзенштейн, 1850) Докажите, что при простом $p > 2$

$$\frac{2^p - 2}{p} \equiv 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{p-1} \pmod{p}.$$

2. а) Пусть $p = 1601$ (простое число), а $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь, равная сумме тех из дробей

$$\frac{1}{0^2+1}, \quad \frac{1}{1^2+1}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{(p-1)^2+1},$$

знаменатели которых не делятся на p. Докажите, что $2m + n$ делится на p.

б) Пусть $p = 4k + 3$ — простое число, а $\frac{m}{n}$ — такая несократимая дробь, что

$$\frac{1}{0^2+1} + \frac{1}{1^2+1} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2+1} = \frac{m}{n}.$$

Докажите, что $2m - n$ делится на p.

3. Докажите, что уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда найдутся целые a, b, A, B, C такие, что $d = a^2 + b^2$, $A^2 + B^2 = C^2$, $aA - bB = 1$.

4. Докажите, что для любого натурального числа n число $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \cdot 2^{3k}$ не делится на 5.