Серия 4(а), в которой не особенно скрываются гауссовы числа.

1. Докажите, что число решений уравнения $x^2 + y^2 = N$ в целых числах равно учетверенной разности количества делителей N вида $4k + 1$ и количества делителей N вида $4k + 3$ (в частности, это означает, что количество первых всегда не меньше количества вторых).

2. Натуральные числа x, y и z таковы, что $xy = z^2 + 1$. Докажите, что существуют целые числа a, b, c и d такие, что $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$ и $z = ac + bd$.

3. Пусть $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}$, где $\frac{a_n}{b_n}$ – несократимая дробь. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, при которых выполнено неравенство $b_{n+1} < b_n$.

4. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(1 + \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}$ и $P(3 + \sqrt{5}) = 3 + \sqrt{5}$?