Вступительные задачи, группа А

1. Прямоугольный город состоит из mn квадратных кварталов: m в длину и n в ширину. Докажите, что количество маршрутов из юго-западного угла города в северо-восточный, не проходящих более одного раза через одну точку, не превосходит 2^{mn}.

2. В город привезли 200 бочек кваса. Пятеро злодеев подсыпали в одну из бочек яд. Если человек выпивает квас с ядом, то в течение суток он умирает. Злодеи были пойманы, и городские власти хотят выяснить, какие бочки можно пускать в продажу. Для этого они могут давать выпить квас из любой бочки любому злодею. Какое наибольшее число безопасных бочек можно определить за двое суток?

3. Множество A состоит из натуральных чисел, причем среди любых 100 идущих подряд натуральных чисел есть число из A. Докажите, что в A найдутся четыре различных числа a, b, c, d такие, что $a + b = c + d$.

4. Пусть n – натуральное число. Множество натуральных чисел, не превосходящих n, таково, что наименьшее кратное любых двух различных его элементов не меньше $n + 2$. Докажите, что сумма обратных величин элементов множества а) меньше 2, б) меньше $3/2$.

5. Для некоторого натурального n нашлось n таких строк одинаковой длины, составленных из нулей и единиц, что для любого $1 \leqslant k \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$ среди них найдутся две строки, отличающиеся ровно в k разрядах. Докажите, что n – либо точный квадрат, либо точный квадрат, увеличенный на 2.

6. На множестве S определена операция $*$, удовлетворяющая условиям:

(i) $x * (y * z) = (x * y) * z$ при всех x, y, $z \in S$;

(ii) если $x \neq y$, то $x * y \neq y * x$.

Докажите, что $x * (y * z) = x * z$ при всех x, y, $z \in S$.

7. При каких целых m и n выполняется равенство $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$?

8. Вершины дерева окрашены в красный и синий цвета так, что любые две смежные вершины – разного цвета. Красных вершин не меньше, чем синих. Докажите, что в этом дереве имеется висячая красная вершина.

9. Для вещественных чисел $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{2n}$ докажите неравенство: $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n})^2 \geqslant 4n(a_1a_{n+1} + a_2a_{n+2} + \ldots + a_na_{2n})$.

10. Докажите, что произвольные N^2 попарно различных натуральных чисел ($N > 10$) можно расположить в таблице $N \times N$ так, чтобы все $2N$ сумм по строкам и по столбцам были различны.