Вступительные задачи, группа В

1. Наибольший собственный делитель натурального числа n равен d. Может ли наибольший собственный делитель $n+2$ равняться $d+2$? (*Собственным делителем* числа называется любой его натуральный делитель, кроме 1 и самого числа.)

2. Узлы бесконечного клетчатого листа бумаги раскрашены в три цвета (причем все три цвета присутствуют). Докажите, что найдется прямоугольный треугольник (с катетами, не обязательно идущими по линиям сетки), вершины которого расположены в узлах и раскрашены в разные цвета.

3. Пусть p_n – n-е простое число, а $\pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n. Докажите, что каждое натуральное число представляется ровно в одном из видов $n + p_n - 1$ или $n + \pi(n)$.

4. На доске написаны натуральные числа p и q. Разрешается увеличивать оба числа на 1, либо, если одно из чисел является точным квадратом, извлечь из него корень. При каких исходных p и q можно несколькими такими операциями добиться, чтобы числа стали равными?

5. У каждого из двух натуральных чисел m и n нашли произведение всех его натуральных делителей (включая само число). Полученные произведения оказались равными. Докажите, что $m = n$.

6. На прямой лежат несколько отрезков единичной длины. Докажите, что на прямой можно отметить несколько точек таким образом, чтобы на каждом отрезке была отмечена ровно одна точка (концы отрезка принадлежат отрезку).

7. В ряд лежат 20 монет: орел, решка, орел, решка и т. д. Разрешается взять несколько монет подряд и перевернуть. За какое наименьшее количество операций можно перевернуть все монеты орлами вверх?

8. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.д.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

9. n школьников занимаются в кружках. В каждом кружке состоят ровно 5 человек. Для любых двух школьников существует не более одного кружка, в котором занимаются они оба. Докажите, что количество кружков не более $\frac{n^2}{20}$.

10. Можно ли составить замкнутое ожерелье из 100 бусинок – красных, синих и зеленых, так, чтобы между любыми двумя красными бусинками была хотя бы одна синяя, между любыми двумя синими – зеленая, между любыми двумя зелеными – красная?