Серия 1(а), с турнирными графами

1. Из натуральных чисел от 1 до $2n$ выбрали $n+1$ число. Докажите, что одно из выбранных делится на другое.

2. Даны вещественные числа $a \neq 0$, b и c. Докажите, что существует многчолен $P(x)$ с вещественными коэффициентами такой, что многочлен $aP^2(x) + bP(x) + c$ делится на $x^2 + 1$.

3. В волейбольном однокруговом турнире участвовало 2^n команд. Докажите, что после окончания турнира можно выбрать $n+1$ команду A_1, A_2, ..., A_{n+1} так, чтобы каждая из них выиграла у всех команд с бóльшими номерами.

4. В некоторой стране каждые два города соединены дорогой. На каждой дороге разрешено движение только в одном направлении. Докажите, что найдется город, выехав из которого, можно объехать всю страну, побывав во всех городах по одному разу.

5. В графстве n усадеб, каждые две из которых соединены дорогой. Эксцентричный джентльмен, которого назначили начальником ГАИ графства, решил установить на всех дорогах одностороннее движение так, чтобы, выехав из какой-либо усадьбы, в нее больше нельзя было вернуться.

а) Докажите, что он может это сделать.

б) Сколькими способами он может осуществить свое намерение?

6. В марсианском языке алфавит состоит из букв A и O. Каждые два слова одинаковой длины отличаются по крайней мере в трех местах. Докажите, что число слов длины n не более $2^n/(n+1)$.

7. $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$ (m и n – натуральные числа). Докажите, что $\frac{m}{n} < \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.

8. Дано натуральное n. Найдите количество последовательностей a_0, a_1, a_2, ..., a_k, все члены которых равны 0, 1, 2 или 3, таких, что $n = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \ldots + 2^ka_k$.