

Серия 2(а), про многочлены

1. Докажите, что в любой многочлен $P(x)$ степени больше 1 можно подставить многочлен $Q(x)$ степени, большей 1, такой, что $P(Q(x))$ делится на $P(x)$.
2. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями: $a_1 = 3$, $a_n = n(a_{n-1} - 1) + 2$. Докажите, что в графе с a_n вершинами, ребра которого окрашены в n цветов, найдется треугольник с одноцветными сторонами.
3. При каком наименьшем n в десятичной записи дроби m/n после запятой может встретиться набор цифр ...501...?
4. Докажите, что многочлен $1 + x^{1111} + x^{2222} + x^{3333} + \dots + x^{9999}$ делится на многочлен $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^9$.
5. Найдите сумму коэффициентов при а) четных, б) нечетных степенях x в многочлене $(x^2 + x + 1)^{2022}$.
6. При каких вещественных c существует такой многочлен p , что $p(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2+c}$ для всех натуральных n ?
7. Докажите тождество

$$\frac{C_n^0}{x} - \frac{C_n^1}{x+1} + \dots + (-1)^n \frac{C_n^n}{x+n} = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

8. Коэффициенты a, b, c многочлена $x^3 + ax^2 + bx + c$ по модулю не превосходят 1980. Может ли этот многочлен иметь корень, превосходящий по модулю 1981?
9. Докажите, что если многочлены с целыми коэффициентами $x^2 + p_1x + q_1$ и $x^2 + p_2x + q_2$ имеют общий не целый корень, то $p_1 = p_2$ и $q_1 = q_2$.