

Серия 2(б), с графиками

1. Город окружён круговым кольцом с односторонним движением. Его пересекают несколько прямых улиц, на каждой из которых тоже введено одностороннее движение. Докажите, что в городе найдется микрорайон, который можно обогнуть по периметру, не нарушая правил движения.
2. В прямоугольнике $3 \times n$ (3 строки, n столбцов) расставлены фишечки трех цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишечки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишечки всех трех цветов.
3. В графстве Эбандантшир можно было добраться из любого города в любой другой, но, возможно, более чем одним способом. Докажите, что м-р Скрудж, новый начальник ГАИ графства и известный борец за экономию, может закрыть несколько дорог так, чтобы любые два города оказались соединены единственным маршрутом.
4. Докажите, что связный граф с n вершинами и $n - 1$ ребром – дерево.
5. В графе 20 вершин и 172 ребра. Докажите, что этот граф связан.
6. В клетках прямоугольной таблицы записаны натуральные числа. Можно вычитать по 1 из всех чисел столбца или умножать на 2 все числа строки. Докажите, что можно сделать все числа равными 0.
7. Сумма n натуральных чисел равна $2n - 2$. Докажите, что существует граф с n вершинами, степени которых равны данным числам.
8. В компании из 100 джентльменов у любого джентльмена по крайней мере 50 знакомых. Докажите, что можно выбрать четырех из них и рассадить за круглый стол так, чтобы каждый сидел между двумя знакомыми.