Серия 3(а), смешанная

1. У каждого из чисел от $9 \cdot 10^n$ до $12 \cdot 10^n$ выбрали делитель, меньший его самого. Докажите, что хотя бы два из этих делителей совпадают.

2. Король сказочной страны пригласил на пир людоедов своей страны. Среди них есть людоеды, которые хотят съесть других людоедов. (Если людоед A хочет съесть людоеда B, то это не значит, что людоед B хочет съесть людоеда A.) Известно, что наибольшая цепочка, в которой первый людоед хочет съесть второго, второй – третьего и т.д., состоит из шести людоедов. Докажите, что король может так рассадить людоедов по шести комнатам, что в каждой комнате никто не хочет никого есть.

3. Найдите наибольший общий делитель многочленов $(x-1)^{101}+1$ и $(x+1)^{99}-1$.

4. Многочлен четвертой степени $P(x)$ имеет четыре различных корня: $a > b > c > d$. Известно, что $P(x)$ можно представить в виде $P(x) = Q(R(x))$, где $Q(x)$ и $R(x)$ – квадратные трехчлены. Докажите, что $a - b = c - d$.

5. Дано m таких различных натуральных чисел a_i, меньших чем N, что $[a_i, a_j] \leqslant N$ для всех $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$. Докажите, что $m \leqslant 2[\sqrt{N}]$.

6. Докажите, что если действительные числа x, y и z удовлетворяют соотношениям $x+y+z=2$ и $xy+yz+zx=1$, то они лежат в промежутке $[0; 4/3]$.

7. Докажите, что график каждого многочлена третьей степени имеет центр симметрии.

8. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами принимает значение 2 при четырех различных целых значениях x. Докажите, что ни при каких целых x этот многочлен не принимает значений 1, 3, 5, 7 и 9.