Серия 3(b): джентльмены графства Липшир.

1. Если n-угольник, где $n \geqslant 4$, разрезан не пересекающимися внутри n-угольника диагоналями на треугольники, то среди этих треугольников встречаются такие, которые имеют с многоугольником две общие стороны, одну общую сторону или ни одной – пусть их количества соответственно a_2, a_1, a_0. Докажите, что $2a_2 + a_1 = n$.

2. Докажите, что из любого связного графа можно удалить вершину (и выходящие из неё рёбра) так, чтобы получился связный граф.

3. В графстве имеется 1000 коттеджей, в каждом из которых живет по одному джентльмену. В один прекрасный день каждый джентльмен переезжает из своего дома в какой-либо другой (переезд осуществляется так, что после него в каждом доме живет один джентльмен). Доказать, что после переезда можно так покрасить все 1000 коттеджей синей, зеленой и красной красками, чтобы у каждого хозяина цвет его нового дома отличался от цвета старого дома.

4. Эксцентричный джентльмен мистер Доджсон построил в саду модель графства Липшир под названием "Зазеркалье". Если две усадьбы в графстве соединены дорогой, то в Зазеркалье — нет, и наоборот. Из усадьбы A нельзя проехать в усадьбу B, заехав по дороге менее, чем к двум джентльменам. Докажите, что в Зазеркалье можно проехать из любой усадьбы в любую, заехав по дороге не более, чем в две чужих усадьбы.

5. Докажите, что

а) каждое натуральное число можно представить в виде суммы степеней двойки с различными целыми неотрицательным показателями,

б) и притом единственным образом.

6. Известно, что $x + \frac{1}{x}$ – целое число. Докажите, что тогда при любом натуральном n число $x^n + \frac{1}{x^n}$ – тоже целое.

7. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n + 3$. Найдите явное выражение для x_n.

8. Среди 6 джентльменов графства Липшир некоторые друг другу представлены, а некоторые – нет. Докажите, что найдутся три таких джентльмена, которые либо все друг другу представлены, либо все друг другу не представлены.