Серия 4(а): ещё многочлены и неравенства

1. Докажите, что для любого действительного корня уравнения $x^3 + px + q = 0$ выполняется неравенство $4qx \leqslant p^2$.

2. $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$ при $x \in [0; 1]$. Докажите, что $|a| + |b| + |c| \leqslant 17$.

3. Докажите, что $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_6)(x_6 - x_1) \leqslant \frac{1}{16}$ для любых вещественных $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ на отрезке $[0; 1]$.

4. Про положительные числа a, b, c, x, y, z известно, что $a < b < c$; $a \leqslant x < y < z \leqslant c$; $abc = xyz$; $a + b + c = x + y + z$. Докажите, что $a = x$, $b = y$, $c = z$.

5. а) Существует ли бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такая, что для любого натурального k последовательность $a_1 + k, a_2 + k, a_3 + k, \ldots$ содержит конечное число простых чисел (возможно, ни одного)?

б) Существует ли бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такая, что для любой возрастающей арифметической прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots$ с натуральными членами последовательность $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots$ содержит конечное число простых чисел (возможно, ни одного)?

6. Докажите, что ни при каком значении параметра c уравнение $x(x^2 - 1)(x^2 - 1989) = c$ не может иметь 5 целых корней.

7. Сколько различных чисел встречается в последовательности $\left[\frac{1^2}{1980}\right], \left[\frac{2^2}{1980}\right], \ldots, \left[\frac{1980^2}{1980}\right]$?

8. Про многочлены $R(x)$ и $S(x)$ с целыми коэффициентами известно, что при любом целом x число $R(S(x)) - x$ делится на данное целое k. Докажите, что число $S(R(x)) - x$ тоже делится на k при любом целом x.