

Серия 4(б), с арифметикой и неравенствами

1. Определим число $n?$ ("эн вопросиал") следующим образом: $1? = 1$, $n? = \frac{n}{(n-1)?}$ для всех $n > 1$. Докажите, что $n? \times n! -$ точный квадрат.
2. В графстве Липшир между усадьбами любых двух из 100 джентльменов имеется либо водное сообщение (на лодочке), либо сухопутное (каретой). Не исключаются оба варианта. Докажите, что можно упразднить один из видов транспорта так, чтобы из любой усадьбы можно было проехать в любую другую (возможно, с пересадками).
3. Докажите неравенство ДВА × ШЕСТЬ < ДВАДЦАТЬ. (Здесь каждая буква обозначает цифру, причем разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым – одинаковые.)
4. Положим $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{100}$. Докажите, что а) $S > 1/5$; б) $S < 2/5$.
5. Можно ли натуральные числа от 1 до 9 разбить на 3 группы, в каждой из которых произведение чисел не больше а) 72, б) 71?
6. а) Хулиган Вася возводил число в квадрат и получил 1234567895. Учительница поставила ему двойку. Докажите, что у нее были на то основания.
б) "С чего бы это вдруг?" – подумал Вася. Он попробовал еще раз и получил 1234567896. Учительница поставила ему вторую двойку. Докажите, что и это число не является точным квадратом.
7. Сколько нулями оканчивается число: а) $9^{999} + 1$, б) $99^{99} + 1$?
8. $3a + 7b$ делится на 11. Докажите, что $a - 5b$ делится на 11.