Серия 5(а): по потребностям.

1. а) Множество всех целых чисел разбито на попарно непересекающиеся бесконечные арифметические прогрессии с положительными разностями d_1, d_2, d_3, ..., d_n. Докажите, что $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\ldots+\frac{1}{d_n}=1$.

б) Верно ли это утверждение, если число прогрессий бесконечно?

2. *Стандартная парабола* – это график квадратного трехчлена $y=x^2+ax+b$ со старшим коэффициентом 1. Три стандартные параболы с вершинами V_1, V_2, V_3 попарно пересекаются в точках A_1, A_2, A_3. Обозначим через $s(A)$ точку, симметричную точке A относительно оси абсцисс. Докажите, что стандартные параболы с вершинами $s(A_1)$, $s(A_2)$, $s(A_3)$ попарно пересекаются в точках $s(V_1)$, $s(V_2)$, $s(V_3)$.

3. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$, что для любого натурального n уравнение $\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n\text{ раз}}=0$ имеет ровно 2^n различных действительных корней?

4. Даны три квадратных трехчлена: $P_1(x)=x^2+p_1x+q_1$, $P_2(x)=x^2+p_2x+q_2$ и $P_3(x)=x^2+p_3x+q_3$. Докажите, что уравнение $|P_1(x)|+|P_2(x)|=|P_3(x)|$ имеет не более восьми корней.

5. На плоскости расположены два равносторонних треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, вершины которых занумерованы по часовой стрелке. Из произвольной точки O отложены векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, равные соответственно векторам $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$. Докажите, что точки A, B, C также являются вершинами равностороннего треугольника.

6. Стороны n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ продлили в направлении обхода, построив на лучах A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 точки B_1, B_2, ... B_n так, что $A_1A_2=A_2B_1$, ..., $A_nA_1=A_1B_n$. Оказалось, что n-угольник $B_1B_2\ldots B_n$ – правильный. Докажите, что n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ – тоже правильный.

7. Докажите, что $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geqslant\sqrt{a^2+ac+c^2}$ при положительных a, b, c.

8. Докажите, что для любой последовательности положительных чисел a_n целые части квадратных корней из чисел $b_n=(a_1+a_2+\ldots+a_n)(1/a_1+1/a_2+\ldots+1/a_n)$ все различны.