Серия 5(b): оказывается, мы знаем про сравнения!

1. Докажите, что при всех натуральных n число $(2^n-1)^n-3$ делится на 2^n-3.

2. Известно, что:

а) (2^k-1) – простое число. Докажите, что k – простое.

б) (2^n+1) – простое число. Докажите, что n – степень двойки.

3. $A=\overline{a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0}$ – натуральное число. Докажите, что а) $A\equiv\overline{a_1a_0} \pmod 4$, б) $A\equiv\overline{a_2a_1a_0} \pmod 8$, в) $A\equiv a_0+a_1+\ldots+a_n \pmod 9$, г) $A\equiv a_0-a_1+a_2-\ldots+(-1)^na_n \pmod{11}$, д) $A\equiv\overline{a_2a_1a_0}+\overline{a_5a_4a_3}+\overline{a_8a_7a_6}+\cdots \pmod{37}$.

4. Решите в целых числах уравнение $19x^3-84y^2=1984$.

5. Докажите, что $1997!!+1998!!$ делится на 1999. ($n!!=n(n-2)(n-4)\ldots$)

6. На круглом барабане 1024 сектора. Докажите, что в каждый сектор можно записать десятизначное число из цифр 1 и 2 так, чтобы все числа были различными и любые два соседних различались ровно в одном разряде.

7. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}$ при условии $1\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 100$.

8. В ряд в порядке возрастания выписаны 100 положительных чисел, не превосходящих 1. Пусть a – сумма первого, третьего, пятого, и т. д. до 99-го числа в ряду. Пусть b – сумма остальных чисел. Докажите, что $a\leqslant b\leqslant a+1$.