Серия 6(а), с неприличными словами.

1. Существуют ли четыре таких квадратных трехчлена, что, записав их в любом порядке, мы сможем найти число, при подстановке которого в эти трехчлены полученные значения будут записаны в строго возрастающем порядке?

2. Дано натуральное n. Назовём *словом* последовательность из n букв латинского алфавита, а *расстоянием* $\rho(A, B)$ между словами $A = a_1a_2 \ldots a_n$ и $B = b_1b_2 \ldots b_n$ – количество разрядов, в которых они отличаются (то есть количество таких i, для которых $a_i \neq b_i$). Мы скажем, что слово C *лежит между словами* A *и* B, если $\rho(A, B) = \rho(A, C) + \rho(C, B)$. Какое наибольшее количество слов можно выбрать так, чтобы среди любых трёх нашлось слово, лежащее между двумя другими?

3. На столе лежит чётное число карточек, на каждой из которых написано натуральное число. Пусть a_k — количество карточек, на которых написано число k. Оказалось, что

$$a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \ldots \geqslant 0$$

для каждого натурального n. Докажите, что карточки можно разложить по парам, в каждой из которых числа отличаются на 1.

4. Дана бесконечная десятичная дробь, причем после запятой у нее встречаются только цифры 0, 1, 2. Известно, что если все цифры 0 заменить на 1, то получится периодическая десятичная дробь (возможно с предпериодом), и если все цифры 1 заменить на 2, то тоже получится периодическая десятичная дробь. Следует ли отсюда, что исходная дробь периодическая?

5. В бесконечном десятичном разложении действительного числа a встречаются все цифры. Пусть v_n – количество различных цифровых отрезков длины n, встречающихся в этом разложении. Докажите, что если для некоторого n выполнено условие $v_n \leqslant n + 8$, то число a рационально.

6. Докажите, что для любых натуральных чисел m и n существует такое рациональное число x, что $\frac{1}{3} \leqslant \{mx\} \leqslant \frac{2}{3}$, $\frac{1}{3} \leqslant \{nx\} \leqslant \frac{2}{3}$.

7. В алфавите племени Которас ровно 11 букв, любая последовательность букв является словом. Известно, что для каждого натурального k в языке этого племени имеется ровно пять k–буквенных неприличных слов. Докажите, что можно написать на стене такое приличное слово из 2022 букв, что, где бы MS Word ни вставил пробел, получатся два приличных слова.

8. На прямой дано 50 отрезков. Докажите, что верно хотя бы одно из следующих утверждений:

а) некоторые восемь отрезков имеют общую точку;

б) найдется восемь отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.