

**Серия 6(b), напоследок.**

1.  $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$  – натуральное число. Докажите, что  $A \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} - \dots \pmod{7}$ .
2. Докажите, что если у натурального  $N$ 
  - a) нет простых делителей, не превосходящих  $\sqrt{N}$ , то  $N$  – простое;
  - b) нет простых делителей, не превосходящих  $\sqrt[3]{N}$ , то любой собственный делитель  $N$  прост.
3. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, дающих при делении на 4 остаток 3.
4. Докажите, что число  $1000! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \times \dots \times 1000$  не является точным квадратом.
5. Является ли число  $1000\dots009$  (2023 нуля) точным квадратом?
6. На полу лежат 2022 ящика. В некоторых из этих ящиков еще по 2022 ящиков и т.д. Сколько всего ящиков, если непустых ящиков ровно 100 штук?

7. Три кота съели 60 кг барабульки. Потом, лежа на солнцепеке и облизываясь, они заметили, что количества рыбы, съеденные любыми двумя котами, отличаются не более, чем на 3 кг. Какое наименьшее количество рыбы мог съесть кот, которому досталось меньше всего?

8. Восемнадцать коротышек водят хоровод. Среди них девять мальчиков и девять девочек. Очень умному Знайке сообщили, что  $x$  коротышек-мальчиков стоят подряд. После этого он сделал абсолютно верный вывод, что в хороводе три коротышки-девочки тоже должны стоять подряд. Найдите наименьшее возможное значение  $x$ .