

1. Даны корни x_0 и x_1 , x_0 и x_2 , ..., x_0 и x_n квадратных трёхчленов $y = x^2 + a_1x + b_1$, $y = x^2 + a_2x + b_2$, ..., $y = x^2 + a_nx + b_n$. Найдите корни квадратного трёхчлена $y = x^2 + \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}x + \frac{b_1+b_2+\dots+b_n}{n}$.

2. Маленький Зулус прыгает по дорожке, разделенной на n квадратов, каждый раз ступая на следующий квадрат или через один. Сколькими способами он может пройти такую дорожку?

3. Найдите все натуральные числа, представимые в виде $\frac{mn+1}{m+n}$, где m и n – натуральные числа.

4. Сумма положительных чисел x , y и z равна 11. Докажите неравенство $x^{[x]} + y^{[y]} + z^{[z]} > 81$.

5. Даны простые числа p и q и натуральные числа x и y , причем $x < p$ и $y < q$. Докажите, что если число $\frac{p}{x} + \frac{q}{y}$ – целое, то $x = y$.

6. Найдите все функции f , удовлетворяющие при любых действительных x и y уравнению $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$.

7. (*Лемма Монсиона*) а) Докажите, что середина дуги описанной окружности треугольника ABC , на которую опирается угол ABC , равноудалена от A , C и центра вписанной окружности треугольника.

б) Докажите, что середина другой дуги с концами A и C равноудалена от A , C и центров вневписанных окружностей треугольника, касающихся AB и BC .

Задание. Узнайте формулировку и доказательство теоремы Чевы.

8. Чевяны AA_1 , BB_1 , CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Описанная около $A_1B_1C_1$ окружность вторично пересекает стороны треугольника в точках A_2 , B_2 , C_2 . Докажите, что AA_2 , BB_2 , CC_2 тоже пересекаются в одной точке.

9. а) На симпозиуме каждый делегат знаком хотя бы с одним из остальных участников и не знаком со всеми. Докажите, что всех делегатов можно разбить на две группы так, чтобы каждый участник симпозиума был знаком хотя бы с одним человеком из своей группы.

б) На симпозиуме каждый делегат знаком хотя бы с одним из остальных участников, но при этом для любых двух делегатов найдется третий, не знакомый ни с одним из них. Докажите, что всех делегатов можно разбить на три группы так, чтобы каждый участник симпозиума был знаком хотя бы с одним человеком из своей группы.

10. Из квадрата клетчатой бумаги размером $2^n \times 2^n$ вырезали одну а) угловую, б) произвольную клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на “уголки” из трех клеток.