

Серия 5(с): всё и сразу.

1. Имеется n дискеток и n этикеток, раскрашенные в несколько цветов. Дубль – это дискета, к которой приклеена этикетка того же цвета. Докажите, что можно добиться того, что все дубли будут одного цвета.
2. У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растёт щетина. Его пересекает несколько прямых, на каждой из которых с одной из сторон растут волосы. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется волосатой снаружи.
3. Докажите, что дробь а) $\frac{n+1}{n}$, б) $\frac{2n+1}{n+1}$ несократима при всех натуральных n .
4. Поле для игры в морской бой – квадрат 10×10 . Какое наименьшее количество выстрелов надо сделать, чтобы наверняка попасть в "корабль" 1×4 ?
5. Хулиган Вася придумал признак делимости: если сумма цифр числа делится на 27, то и само число делится на 27. Верен ли этот признак?
6. На острове Раздробленный расположено 15 стран. Докажите, что найдется страна, у которой четное число дружественных соседей.
7. Докажите, что $2^{700} - 1$ делится на 127.
8. a, b, c, d и n — натуральные числа, причем $a + b$ и $c + d$ делятся на n . Докажите, что $ac - bd$ делится на n .